ОРМО 2017-2018 I этап

МАТЕМАТИКА
10 класс Вариант 1

1. Из города в одном и том же направлении выходят три пешехода: второй – через 2 минуты после первого, а третий – через 3 минуты после второго. Через 5 минут после своего выхода из города третий пешеход догнал второго, а еще через 2 минуты он догнал первого пешехода. Найдите через сколько времени после своего выхода из города второй пешеход догонит первого.

(7 баллов)

Ответ: 28 минут.

Решение. Обозначим v_1 м/мин – скорость первого пешехода, v_2 м/мин – второго, v_3 м/мин – третьего пешеходов, t мин – время, за которое второй пешеход догонит первого после своего выхода из города. Тогда, согласно условию задачи, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_3 \cdot 5 = v_2 \cdot 8 \\ v_3 \cdot 7 = v_1 \cdot 12 \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot (t+2) \end{cases}.$$

Исключая v_3 из первых двух уравнений, получим, что $\frac{v_2}{v_1} = \frac{15}{14}$, далее из третьего уравнения находим $t = 28$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно составлены все уравнения (при этом они могут отличаться от приведённых в решении, если использованы другие неизвестные), но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 3-4 балла.

2. Решить уравнение $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

(8 баллов)

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{12}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Решение. Переписав уравнение в следующем виде

$$\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12\cdot 6\cdot 4\cdot 3},$$

и перемножив первую скобку с четвертой, вторую с третьей, получим

$$\left(x^2-\frac{5x}{12}+\frac{1}{36}\right)\left(x^2-\frac{5x}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{12\cdot 6\cdot 4\cdot 3}.$$

Сделав замену $t = x^2-\frac{5x}{12}+\frac{1}{36}$, получим квадратное уравнение

$$t\cdot\left(t+\frac{1}{72}\right)=\frac{5}{12\cdot 6\cdot 4\cdot 3} \iff 72t^2+t-\frac{5}{12}=0,$$

решая которое, находим корни $t_1=-\frac{1}{12}$, $t_2=\frac{5}{72}$. Уравнение $x^2-\frac{5x}{12}+\frac{1}{36}=-\frac{1}{12}$ корней не имеет.

Решая второе уравнение $x^2-\frac{5x}{12}+\frac{1}{36}=\frac{5}{72} \Leftrightarrow 24x^2-10x-1=0$, находим корни $x_1=-\frac{1}{12}$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 8 баллов.

Исходное уравнение верно сведено к квадратному уравнению, возможно, отличному от приведенного в решении, при решении которого получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 4 балла.

3. Решите в целых числах уравнение $x+y=x^2-xy+y^2$.

(10 баллов)

Ответ: (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2).

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2-(y+1)x+y^2-y=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2+6y+1$. Он положителен лишь для следующих значений y: 0, 1, 2. Для каждого из этих значений из исходного уравнения получаем квадратное уравнение относительно x, которое легко решается.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 10 баллов.

Решение задачи сведено к исследованию квадратного уравнения относительно x или y и получены не все пары решений – 3-5 баллов.

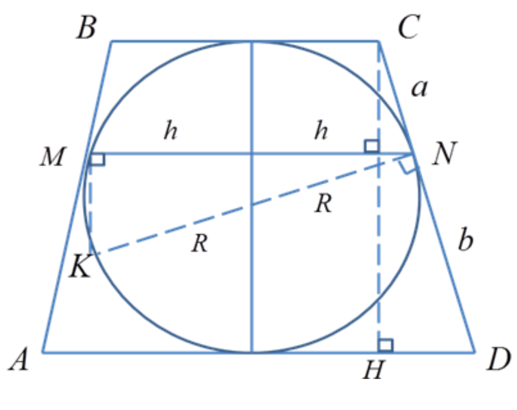
Некоторые пары решений получены подбором – 1-2 балла.

4. Около окружности радиуса 6 описана равнобочная трапеция. Найдите площадь трапеции, если известно, что площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции, равна 48.

(10 баллов)

Ответ: 216.

Решение. Обозначим через M и N – точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции (см. рис.). Проведем NK – диаметр окружности и CH⊥AD. Прямоугольные треугольники MNK и HCD подобны, так как у них $\angle N=\angle C$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Поэтому $\frac{KN}{MN}=\frac{CD}{CH} \Rightarrow$ $\frac{12}{2h}=\frac{a+b}{12} \Rightarrow a+b=\frac{72}{h}$, а площадь данного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна $S=\frac{1}{2}\cdot 2h\cdot 2R \Rightarrow h=\frac{48}{12}=4$, откуда площадь трапеции с основаниями $2a$ и $2b$ (по свойству касательных) и высотой $2R$ равна



$$S_{ABCD}=\frac{2a+2b}{2}\cdot 2R \Rightarrow S_{ABCD}=\frac{72}{h}\cdot 12=\frac{72}{4}\cdot 12=216.$$

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 10 баллов.

Ход решения в целом верен, но из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ – 4-6 баллов.

Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

Замечание. В предыдущем варианте этой задачи, в которой **R=5** и площадь четырехугольника равна **50**, **трапеция вырождается в квадрат с площадью, конечно, равной 100.** Это должно быть отражено в решении.

5. При каких значениях a сумма четвертых степеней корней уравнения

$$x^2 - x + a = 0$$

принимает наименьшее значение?

(15 баллов)

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Решение. Уравнение имеет действительные корни, если $1-4a \ge 0$, то есть $a \le \frac{1}{4}$. При $a \le \frac{1}{4}$

$x_1 + x_2 = 1$ и $x_1 \cdot x_2 = a$.

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 \cdot x_2\right)^2 - 2\cdot\left(x_1 \cdot x_2\right)^2 =$$

$$= \left(1^2 - 2a\right)^2 - 2a^2 = 1 - 4a + 4a^2 - 2a^2 =$$

$$= 2a^2 - 4a + 1 = 2\cdot\left(a-1\right)^2 - 1$$

Функция $f(a) = 2\cdot(a-1)^2 - 1$ убывает на промежутке $(-\infty;1]$ и возрастает на промежутке $[1;+\infty)$. Так как $a \le \frac{1}{4}$, то свое наименьшее значение на промежутке $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ функция $f(a)$ принимает при $a = \frac{1}{4}$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 15 баллов.

Решение задачи сведено к исследованию функции $f(a) = 2a^2 - 4a + 1 = 2\cdot(a-1)^2 - 1$ и с учетом условия $a \le \frac{1}{4}$ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 10 баллов.

Решение задачи сведено к исследованию функции $f(a) = 2a^2 - 4a + 1$ и с учетом условия $a \le \frac{1}{4}$ получен верный ответ без исследования производной или свойств квадратичной функции – 6 баллов.

Решение задачи сведено к исследованию функции $f(a) = 2a^2 - 4a + 1 = 2\cdot(a-1)^2 - 1$ и получен неверный ответ – 3-4 балла.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.